Eine Verallgemeinerung des Reichweitenproblems

Hofmeister, Gerd

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.161-163

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Eine Verallgemeinerung des Reichweitenproblems

Von **Gerd Hofmeister,** Mainz

Ausgehend vom klassischen Reichweitenproblem wird über das lineare diophantische Problem von Frobenius eine Verallgemeinerung des ersten Problems betrachtet, die dem Übergang von Basen schlechthin zu asymtotischen entspricht.

1. Das klassische lokale Reichweitenproblem:

Gegeben sei eine Menge $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ in $\mathbb{N}$ mit $1 = a_1 < \ldots < a_k$. Dann setzen wir

$$h * A_k := \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i,\ x_i \in \mathbb{N}_0,\ \sum_{i=1}^{k} x_i \leqq h\}$$

und

$$[a,b] := \{m \in \mathbb{N}_0 \mid a \leqq m \leqq b\},\ \text{auch Intervall genannt.}$$

Das klassische lokale Reichweitenproblem besteht in der Frage nach dem größten Intervall

$$[0,n] \subseteq h * A_k.$$

Das größte derartige n wird mit $n(h,A_k)$ bezeichnet und Reichweite von A_k bez. h genannt (Rohrbach [5], Stöhr [7], Hofmeister [1]).

Bekannt sind (Stöhr [7])

$$n(h,A_2) = (h+3-a_2)a_2 - 2 \quad \text{für } 2 \leqq a_2 \leqq h+2$$

und Verfahren zur Bestimmung von $n(h,A_3)$ (Windecker [8], Rødseth [4]) sowie $n(h,A_k)$ für spezielle A_k (etwa [1]).

2. Beim klassischen globalen Reichweitenproblem wird die Frage nach

$$n(h,k) := \max_{A_k} n(h,A_k)$$

untersucht (Rohrbach [5]). Hier sind zur Zeit die Werte von $n(h,k)$ samt den zugehörigen optimalen Mengen A_k im wesentlichen für alle $h,k \in \mathbb{N}$ mit

$$(h-1)(k^2-9) \leqq 190$$

bekannt.

3. Das lineare diophantische Problem von Frobenius:

Gegeben sei eine Menge $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ mit $a_1 < \ldots < a_k$ und g.g.T. $(a_1, \ldots, a_k) = 1$. Wir setzen

$$\infty * A_k := \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m = \sum_{i=1}^{k} x_i a_i,\ x_i \in \mathbb{N}_0\}$$

und

$$[a,\infty) := \{m \in \mathbb{N}_0 \mid m \geqq a\}.$$

Was ist das größte Intervall

$$[G,\infty) \subseteq \infty * A_k?$$

Das kleinste derartige G wird mit $G(A_k)$ bezeichnet und Frobeniuszahl von A_k genannt.

Es gilt $G(A_2) = (a_1-1)(a_2-1)$, und für $G(A_3)$ gibt es Verfahren (Siering [6], Rødseth [3]). Im Fall $k \geqq 4$ ist $G(A_k)$ nur für spezielle A_k bekannt. Daneben existieren noch zahlreiche (zumeist obere) Abschätzungen.

4. Zwischen 1. und 3. besteht ein Zusammenhang (Meures [2]):

Definiert man zu beliebigen A_k

$$\bar{A}_k := \{a_k - a_{k-1}, \ldots, a_k - a_1, a_k\},$$

so zeigt Meures

$$n(h,A_k) + G(\bar{A}_k) = h\, a_k \quad \text{für } h \geqq h_0,$$

dabei muß natürlich $a_1 = 1$ sein, damit $n(h,A_k)$ definiert ist.

Dies zieht aber sofort $\bar{a}_{k-1} = \bar{a}_k - 1$ nach sich, also mehr als nur g. g. T. $\bar{A}_k = 1$.

5. Als Verallgemeinerung von 1. betrachten wir für $A_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ mit $a_1 < \ldots < a_k$ und g. g. T. $A_k = 1$ sowie $h \in \mathbb{N}$ das größte Intervall

$$[G(A_k), r] \subseteq h * A_k$$

und bezeichnen das größte ganze derartige r mit $r(h,A_k)$, auch Reichweite von A_k bez. h genannt (mündlicher Vorschlag von A. Beutelspacher).

Weiter heißt

$$s(h,A_k) := r(h,A_k) - G(A_k)$$

Spannweite von A_k bez. h. Dann gilt in der Tat

$$r(h,A_k) + G(\bar{A}_k) = h\, a_k$$

für beliebige A_k mit g. g. T. $A_k = 1$, sofern nur h genügend groß ist.

6. Interessant ist auch die Frage nach

$$s(h,k) := \max_{A_k} s(h,A_k).$$

Während im Fall $k = 2$

$$s(h,2) = n(h,2)$$

gilt, hat man im Fall $k = 3$ für $h \geqq 20$

$$\begin{aligned} s(h,3) &\geqq \frac{2}{27}h^3 + \frac{2}{3}h^2 + \frac{h}{2} - \frac{15}{2} \\ &\geqq \frac{4}{81}h^3 + \frac{2}{3}h^2 + \frac{71}{27}h - \frac{1}{81} \geqq n(h,3). \end{aligned}$$

Asymptotisch ist also s(h,3) erheblich größer als n(h,3), mindestens um den Faktor $\frac{3}{2}$. Dieses Resultat wurde gemeinsam mit P. Stoll gefunden.

Literatur

[1] Hofmeister, G., Über eine Menge von Abschnittsbasen. Journ. f. reine und angew. Math. **213** (1964), 43–57.

[2] Meures, G., Zusammenhang zwischen Reichweite und Frobeniuszahl. Staatsexamensarbeit, Mainz 1978.

[3] Rødseth, Ø., On a linear Diophantine problem of Frobenius. Journ. f. die reine und angew. Math. **301** (1978), 171–178.

[4] Rødseth, Ø., On h-bases for n. Math. Scand. **48** (1981), 165–183.

[5] Rohrbach, H., Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie. Math. Zeitschr. **42** (1936), 1–30.

[6] Siering, E., Über lineare Formen und ein Problem von Frobenius. Diss., Mainz 1974.

[7] Stöhr, A., Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe I. Journ. f. die reine und angew. Math. **194** (1955), 40–65.

[8] Windecker, R., Zum Reichweitenproblem. Unveröffentlichtes Manuskript, Mainz 1978.